微积分

极限、导数与积分

XYZW 丛书

目录

前言 **1**

路线 1

约定 1

第 1 章 极限 **2**

1.1 直觉 2

1.2 严格定义 2

1.3 一个例子 3

1.4 运算法则 3

第 2 章 导数 **4**

2.1 定义 4

2.2 常见导数 4

2.3 数值验证 4

2.4 链式法则 5

前言

微积分回答两个问题：一个量变化得有多快，以及许多微小的量累积起来有多大。两个问题的答案都建立在同一个概念上——极限。

路线

1. 极限：把「无限接近」写成可以检验的不等式。
2. 导数：用极限定义瞬时变化率。

预备知识

读者需要熟悉实数、函数和不等式。线性代数不是必需的，但读过《线性代数》的 向量 会让多元的部分更好懂。

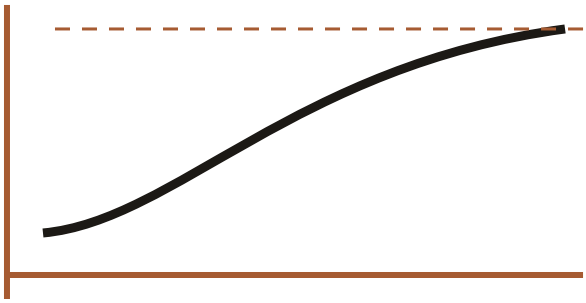
约定

本书的函数默认定义在 $\mathbb{R}$ 的某个区间上，取实数值。微分记号统一写成 $\mathrm{d}x$。

第 1 章　极限

1.1　直觉

当 x 越来越接近 a 时，$f(x)$ 越来越接近某个数 L，我们就说 L 是 f 在 a 处的极限。图中的虚线就是这个 L。



1.2　严格定义

极限

设 f 在 a 的某个去心邻域内有定义。若对任意 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时

$$|f(x) - L| < \varepsilon,$$

则称 L 是 f 在 a 处的**极限**，记作 $\lim_{x \to a} f(x) = L$。

与函数值无关

定义只看 $x \neq a$ 的点。$f(a)$ 是否有定义、等于多少，都不影响极限。

1.3　一个例子

证明 $\lim_{x\to 2}(3x+1)=7$

给定 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon/3$。当 $0<|x-2|<\delta$ 时，

$$|(3x+1)-7|=3|x-2|<3\delta=\varepsilon.$$

1.4　运算法则

若 $\lim_{x\to a} f(x)=L$，$\lim_{x\to a} g(x)=M$，则

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=L+M,\qquad \lim_{x\to a} f(x)\,g(x)=LM.$$

有了极限，导数 就可以定义了。

第 2 章　导数

2.1　定义

导数

若极限

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

存在，则称 f 在 a 处**可导**，$f'(a)$ 是 f 在 a 处的**导数**。

几何上，$f'(a)$ 是曲线在点 $(a, f(a))$ 处切线的斜率。这里用到的极限概念见极限 › 严格定义。

2.2　常见导数

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\ln x$	$1/x$
$\sin x$	$\cos x$

2.3　数值验证

差商在 h 很小时接近导数。下面的程序用中心差商检验 $\sin' = \cos$：

```ts
const derivative = (f: (x: number) => number, x: number, h = 1e-5): number =>
  (f(x + h) - f(x - h)) / (2 * h)

console.log(derivative(Math.sin, 0)) // ≈ 1 = cos(0)
```

为什么用中心差商

中心差商的误差是 $O(h^2)$，单侧差商是 $O(h)$。同样的 h，前者准确得多。

2.4　链式法则

若 g 在 a 处可导，f 在 $g(a)$ 处可导，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(g(x))\Big|_{x=a} = f'(g(a))\, g'(a).$$