概率与统计

事件、随机变量与分布

XYZW 丛书

目录

前言 **1**

本书的结构 1

记号 1

第 1 章 事件 **2**

1.1 样本空间 2

1.2 事件的运算 2

1.3 概率公理 2

第 2 章 随机变量 **4**

2.1 定义 4

2.2 期望 4

2.2.1 期望的线性性 4

2.3 方差 5

2.4 模拟 5

前言

概率论给不确定性一个可以计算的模型，统计学再用这个模型从数据里得出结论。本书只讲前者的基础：事件、概率与随机变量。

本书的结构

- 事件：样本空间、事件与概率公理。
- 随机变量：随机变量、期望与方差。

需要的微积分

连续型随机变量的期望是一个积分。读过《微积分》的 极限 与 导数 就足够了。

记号

本书用 $\mathbb{P}(A)$ 表示事件 A 的概率，用 $\mathbb{E}[X]$ 与 $\mathrm{Var}(X)$ 表示随机变量 X 的期望与方差。

第 1 章　事件

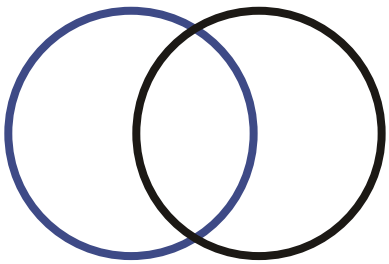
1.1　样本空间

一次随机试验所有可能结果的集合叫作**样本空间**，记作 Ω。掷一枚骰子时 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。

事件是 Ω 的子集。「掷出偶数」就是事件 $A = \{2, 4, 6\}$。

1.2　事件的运算

两个事件 A、B 可以像集合一样运算。下图中两个圆重叠的部分就是 $A \cap B$。



写法	读法	含义
$A \cup B$	A 或 B	至少一个发生
$A \cap B$	A 且 B	同时发生
A^c	非 A	A 不发生
$A \cap B = \emptyset$	互斥	不可能同时发生

1.3　概率公理

概率

函数 $\mathbb{P}$ 把每个事件映到 $[0,1]$ 中的一个数，并满足

1. $\mathbb{P}(\Omega)=1$;
2. 对两两互斥的事件 $A_1, A_2, ...$，有 $\mathbb{P}(\bigcup_i A_i)=\sum_i \mathbb{P}(A_i)$。

加法公式

对任意事件 A、B,

$$\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B).$$

减去的那一项恰好是图中重叠的部分：它被 $\mathbb{P}(A)$ 与 $\mathbb{P}(B)$ 各算了一次。

第 2 章　随机变量

2.1　定义

随机变量是从样本空间到实数的函数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$。它把「发生了什么」变成「得到了多少」。

2.2　期望

离散型随机变量 X 的**期望**是按概率加权的平均值：

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x} x\, \mathbb{P}(X = x).$$

连续型的情形把求和换成积分，$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, \mathrm{d}x$，其中 f 是密度函数。

2.2.1　期望的线性性

线性性

对任意随机变量 X、Y 与常数 a、b，

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\, \mathbb{E}[X] + b\, \mathbb{E}[Y].$$

这个等式不要求 X 与 Y 独立。换成《线性代数》的语言：期望保持每一个 线性组合。

旁白

「aside」不是 Obsidian 的预设类型。发布器照样渲染它，只是换成中性的配色。

2.3　方差

$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])^2\big] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

方差衡量 X 偏离期望的程度。它的平方根叫作**标准差**。

2.4　模拟

```python
import random

rolls = [random.randint(1, 6) for _ in range(100_000)]
print(sum(rolls) / len(rolls))  # close to 3.5
```

掷骰子的期望是 3.5，模拟的平均值会很接近它。事件的记号见事件 › 事件的运算。